תרגילים, דף 1

1 א. יהי V מרחב וקטורי ממימד n, מעל שדה K. תהי $f:V\times V\to K$ פונקציה (תבנית) בילינארית. יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V מעל K. נסמן

$$S=\left(f(v_i,v_j)\right)_{1\le i,j\le n}\in M_n(K) \qquad \text{(מטריצת גרם)}$$

הוכח כי f לא מנוונת אם ורק אם S הפיכה.

ב. יהיו $u,v\in V$. נתבונן בוקטורי הקואורדינטות שלהם לפי B,

$$[u]_B=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\qquad [v]_B=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

הראה כי

$$f(u,v)={}^t[u]_B\, S\, [v]_B=(x_1,\dots,x_n)\, S\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

ג. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. נסמן $g=[T]_B$ (המטריצה המייצגת לפי B). הראה כי

$$f(T(u),T(v))={}^t[u]_B\left({}^t[T]_B\, S\, [T]_B\right)[v]_B=$$

$$=(x_1,\dots,x_n)\left({}^tg S g\right)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

הסק כי $f(T(u),T(v))=f(u,v)$, לכל $u,v\in V$ אם ורק אם

$${}^tgSg=S$$

לכן יש איזומורפיזם של חבורות

$$U(S)=\{g\in GL_n(K)\mid {}^tgSg=S\}\cong$$
$$U(f)=\{T\in \mathrm{Aut}_K(V)\mid f(T(u),T(v))=f(u,v),\ \forall u,v\in V\}$$

2. נניח כי $\mathrm{char}(K)\neq 2$.

א. תהי $S\in GL_m(K)$ אנטי-סימטרית. הוכח כי $m=2n$ זוגי, וכי יש $g\in GL_{2n}(K)$, כך ש ${}^tgSg=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix}:=J_{2n}$.

הוכח כי $Sp_{2n}(K,S)=g\,Sp_{2n}(K)\,g^{-1}$, כאשר

$$Sp_{2n}(K,S)=\{h\in GL_{2n}(K)\mid {}^thSh=S\}$$
$$Sp_{2n}(K)=\{h\in GL_{2n}(K)\mid {}^thJ_{2n}h=J_{2n}\}$$

ב. תהי $S \in GL_n(K)$ סימטרית. הוכח כי יש $g \in GL_n(K)$, כך ש- gSg^t אלכסונית. מצא g כזאת עבור המטריצות הסימטריות הבאות:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} & & I_l \\ & 1 & \\ I_l & & \end{pmatrix}$$

3. א. הוכח כי $Z(Sp_{2n}(K)) = \{\pm I_{2n}\}$.

ב. תהי S אחת המטריצות בשאלה 2ב', הוכח כי $Z(O_n(K,S)) = \{\pm I_n\}$, כאשר $n=2l,\ 2l+1$, בהתאמה.

4. נניח כי $p \in K^*$ אינו ריבוע ב-K (כלומר $\sqrt{p} \notin K$). נתבונן בחבורה האורתוגונלית המתאימה למטריצה הסימטרית $S_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -p \end{pmatrix}$.

א. הראה כי
$$SO_2(K,S_p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & pc \\ c & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a^2 - pc^2 = 1 \right\}$$

ב. תהי
$$U_1 = \left\{ a + c\sqrt{p} \in K(\sqrt{p}) \;\middle|\; \begin{matrix} a, c \in K \\ a^2 - pc^2 = 1 \end{matrix} \right\}$$
(תת החבורה של $K(\sqrt{p})^*$ של האיברים z, כך ש $N_{K(\sqrt{p})/K}(z) = 1$). הראה כי
$$SO_2(K,S_p) \cong U_1$$

ג. הראה כי
$$O_2(K,S_p) = SO_2(K,S_p) \cup SO_2(K,S_p) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ד. הראה כי, באופן כללי,
$$[O_n(K,S) : SO_n(K,S)] = 2$$
לכל מטריצה סימטרית הפיכה $S \in GL_n(K)$.

5. תהי $B_n \subset GL_n(K)$ תת החבורה של המטריצות המשולשות העליונות (ההפיכות). תהי $W_n \subset GL_n(K)$ תת החבורה של מטריצות התמורה (permutation matrices). אלה הן המטריצות מהצורה הבאה. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה של $\{1,2,\dots,n\}$. מטריצת התמורה המתאימה ל-σ היא

$$w(\sigma) = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma(1)} & \cdots & e_{\sigma(n)} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

עמודותיה של $w(\sigma)$ הן תמורה של עמודות הבסיס הסטנדרטי $\{e_1,\dots,e_n\}$ לפי σ. שים לב כי W_n היא אכן חבורה,

והיא איזומורפית ל-S_n.

הוכח כי לכל $g \in GL_n(K)$, יש הצגה בצורה $g = b_1 w b_2$,
כאשר $b_1, b_2 \in B_n$ ו-$w \in W_n$! הוכח כי w נקבע באופן יחיד
ע"י g. (זהו פירוק Bruhat ב-$GL_n(K)$).

6. הוכח כי המערכות C_ℓ, D_ℓ, שהוגדרו בשעור, הן אכן
מערכות שרשים.

7. נתבונן ב- $L = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{Z} e_i + \mathbb{Z} \cdot \frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4) < \mathbb{R}^4$.

נגדיר

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\tfrac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\}$$ (48 איברים)

א. הראה כי

$$\Phi = \{ v = \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \in L \mid \|v\|^2 = 1, 2 \}$$

ב. הראה כי Φ היא מערכת שרשים ב-$\mathbb{R}^4$. זאת המערכת F_4.

8. נתבונן ב-

$$\tilde{L} = \sum_{i=1}^{8} \mathbb{Z} e_i + \mathbb{Z} \cdot \frac{1}{2}(e_1+e_2+\dots+e_8) < \mathbb{R}^8$$

וב-

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^{8} x_i e_i + \frac{y}{2}(e_1+e_2+\dots+e_8) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1, \dots, x_8, y \in \mathbb{Z} \\ \sum_{i=1}^{8} x_i + y \equiv 0 \pmod 2 \end{array} \right\} < \tilde{L}$$

נגדיר

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 8\} \cup \left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i e_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_8 = \pm 1 \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_8 = 1 \end{array} \right\}$$

א. הראה כי $\Phi = \{ v \in L \mid \|v\|^2 = 2 \}$

ב. הראה כי Φ היא מערכת שרשים, בת 240 איברים, ב-$\mathbb{R}^8$.