תרגילים, גל 2

1. יהי V מרחב מכפלה פנימית, מעל $\mathbb{R}$. תהי $X \subset V$ תת קבוצה סופית הפורשת את V, וכך שלכל $x \in X$, $-x \in X$. נניח כי לכל $x \in X$, $s_x(X) = X$. נניח כי $g \in GL(V)$ שומרת על X, כלומר עבור כל $x \in X$, $g(x) \in X$. הוכח כי g מקיימת את המשוואה $g^n = 1$ עבור $n \in \mathbb{N}$ מקיים $n \geq 1$, אז קיים $x \in X$ כך ש- $g(x) \neq x$.

(הנחיה: $W^g = \{v \in V \mid g(v) = v\}$. הוכח כי $W^g \neq V$ אם ורק אם g הפיכה. הוכח כי V/W^g הוא k-מרחב וקטורי, כך ש- $z^k = 1$.)

2. תהי $\Phi \subset V$ מערכת שורשים. נניח כי $g \in GL(V)$ שומרת על Φ. הוכח כי לכל $\alpha \in \Phi$, $W_{g(\alpha)} = g W_\alpha g^{-1}$ (השתמש ב- $g(\alpha)$). הוכח כי לכל $\alpha, \beta \in \Phi$, $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = \frac{2(g(\alpha),g(\beta))}{(g(\alpha),g(\alpha))}$.

3. נאמר כי שתי מערכות שורשים $\Phi \subset V$, $\Phi' \subset V'$ הן איזומורפיות אם יש איזומורפיזם $T: V \to V'$, כך ש- $T(\Phi) = \Phi'$, וכך ש $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = \frac{2(T(\alpha),T(\beta))}{(T(\alpha),T(\alpha))}$, לכל $\alpha, \beta \in \Phi$.

א. תהי $T \in GL(V)$. הוכח כי T אוטומורפיזם של Φ אם $T(\Phi) = \Phi$.

נסמן ב- $\mathrm{Aut}\Phi$ את חבורת האוטומורפיזמים של Φ. הוכח כי $W(\Phi) \triangleleft \mathrm{Aut}(\Phi)$

4. א. הוכיחו כי $\Pi = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{\ell-1} - e_\ell, 2e_\ell\}$ היא מערכת יסודית ב- C_ℓ.

ב. הוכח כי $W(C_\ell) \cong S_\ell \ltimes \mathbb{Z}_2^\ell$

5. א. הוכיחו כי $\Pi = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{\ell-1} - e_\ell, e_{\ell-1} + e_\ell\}$ היא מערכת יסודית ב- D_ℓ.

ב. הוכח כי $W(D_\ell) \cong S_\ell \ltimes \mathbb{Z}_2^{\ell-1}$.

6. א. הוכיחו כי $\Pi = \{a = e_1 - e_2,\ b = 2e_2 - e_3,\ e_3\}$ היא מערכת יסודית ב- G_2.

ב. כתבו את W_a, W_b כמטריצות ב- $GL_3(\mathbb{Z})$. מהו הסדר של $W_a W_b$?

7. (בונוס) במערכת E_8 (בשאר המערכות בסוף גל 1. שכחתי לציין כאן שם...)

(לדוגמה: $|W(F_4)| = 2^7 \cdot 3^2$)

הינו מערכת שורשים.

$$\Pi = \{ e_2 - e_3,\ e_3 - e_4,\ e_4,\ \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \}$$

10. הוכיחו כי F_4 מערכת

(לדוגמה: $|W(E_6)| = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$)

של Φ^9

הינו Φ^9 הינו מערכת שורשים עם Π^9 הינו מערכת יסודית

כי Φ^9

$$\Phi^9 = \left\{ \pm e_i \pm e_j \;\middle|\; 1 \le i < j \le 8 \right\} \cup \left\{ \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i e_i \;\middle|\; \varepsilon_i = \pm 1,\ \varepsilon_7 = \varepsilon_8,\ \prod_{i=1}^{8} \varepsilon_i = 1 \right\}$$

הוכיחו כי

$$\Pi^9 = \Pi^8 \cup \{ e_7 - e_8 \}$$

שהם בדיוק כל הפשוטים של Φ^8 שעליהם

Φ^9 תת הקבוצה של Φ^8 המורכבת מכל שורשי Φ^8

9. מערכת השורשים E_7:

תהי Φ^8 מערכת השורשים E_8 (מסעיף 1). תהי

Φ^7 תת הקבוצה של Φ^8 המורכבת מכל שורשי Φ^8

שהם בדיוק כל הפשוטים של Φ^8 פרט ל- Π^8.

הוכיחו כי

$$\Pi^7 = \{ e_2 - e_3,\ e_3 - e_4,\ e_4 - e_5,\ e_5 - e_6,\ e_6 - e_7,\ e_7 + e_8,\ \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 + \dots + e_8) \}$$

$$= \Pi^8 \setminus \{ e_1 - e_2 \}$$

הוכיחו כי

$$\Phi^7 = \left\{ \pm e_i \pm e_j \;\middle|\; 2 \le i < j \le 7 \right\} \cup \left\{ \pm e_i + \tfrac{1}{2}(e_8 + e_1) \right\} \cap \left\{ \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i e_i \;\middle|\; \varepsilon_i = \pm 1,\ \varepsilon_8 = 1,\ \prod_{i=1}^{8} \varepsilon_i = 1 \right\}$$

לכן Φ^7 הינו מערכת שורשים יסודית עם Π^7:

(לדוגמה $|W(E_7)| = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$)

של Φ^7

8. מערכת השורשים E_8:

$$\Pi^8 = \{ e_1 - e_2,\ e_2 - e_3,\ e_3 - e_4,\ e_4 - e_5,\ e_5 - e_6,\ e_6 + e_7,\ -\tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 + \dots + e_8),\ e_7 - e_8 \}$$

הוכיחו כי

(לדוגמה: $|W(E_8)| = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$)

הינו מערכת יסודית של E_8. רשום את מערכת השורשים