תרגילים, דף 3

1. תהיינה $\Phi\subset V$, $\Phi'\subset V'$ שתי מערכות שרשים במרחבים
בעלי אותו מימד ℓ. תהיינה $\Pi=\{v_1,\dots,v_\ell\}\subset\Phi$
$\Pi'=\{v'_1,\dots,v'_\ell\}\subset\Phi'$ מערכות יסודיות, ונניח כי לכל $1\le i,j\le\ell$,

$$\frac{2(v_i,v_j)}{(v_i,v_i)}=\frac{2(v'_i,v'_j)}{(v'_i,v'_i)}$$

יהי $T:V\to V'$ האיזומורפיזם של מרחבים וקטוריים, המוגדר
ע"י $T(v_i)=v'_i$, $1\le i\le\ell$.
הוכח ש-T מגדיר איזומורפיזם של מערכות השרשים $\Phi\xrightarrow{\sim}\Phi'$.

2. תהי $\Phi\subset V$ מערכת שרשים ותהי $\Pi\subset\Phi$ מערכת יסודית.
תהי Φ^* המערכת הדואלית. נסמן $\Pi^*=\{h_r\mid r\in\Pi\}$.
הוכח כי Π^* היא מערכת יסודית ב-Φ^*.
יהי $\xi\in\Phi^+$, נכתוב $\xi=\sum_{r\in\Pi}x_r r$, כאשר $0\le x_r\in\mathbb{Z}$.
הוכח, כי לכל $r\in\Pi$,

$$0\le\frac{\|r\|^2}{\|\xi\|^2}x_r\in\mathbb{Z}.$$

3. מצא את האיבר w_0 בחבורת Weyl כך ש-$w_0(\Phi^+)=\Phi^-$
במערכות B_ℓ, C_ℓ, D_ℓ.

4. נניח כי $w=w_{r_1}\cdots w_{r_k}$ - מכפלה של שיקופים פשוטים, כך
ש-$k=\ell(w)$. הוכח כי $w(r_k)\in\Phi^-$

5. תהי $\Phi\subset V$ מערכת שרשים. נאמר כי Φ אי-פריקה
אם אי אפשר לפרק את Φ לאיחוד זר של שתי תת-
קבוצות לא ריקות ומאונכות. תהי $\Pi\subset\Phi$ מערכת יסודית.
נאמר כי Π אי-פריקה אם אי אפשר לפרק את Π לאיחוד
זר של שתי תת קבוצות לא ריקות ומאונכות.
הוכח כי Φ אי-פריקה אם ורק אם Π אי-פריקה.
הוכח כי אם $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$ פירוק זר ולא טריביאלי של תת קבוצות
מאונכות, אז Φ_i היא מערכת שרשים ב $V_i=\mathrm{Span}\,\Phi_i$ $(i=1,2)$.

6. תהי $\Phi\subset V$ מערכת שורשים אי-פריקה. נתבונן בהצגה של W במרחב V (W פועלת על V כחבורה סופית של איזומורפיזמים). הוכח כי ההצגה אי-פריקה, כלומר אין ל-V תת מרחב לא טריביאלי שהוא אינווריאנטי לכל איברי W.

7. תהי $\Pi\subset\Phi^+\subset\Phi$ מערכת יסודית. הוכח כי כל $\xi\in\Phi^+$ ניתן לכתיבה בצורה $\xi = r_1+\dots+r_k$, כאשר $r_1,\dots,r_k\in\Pi$ וגם לכל $j\le k$, $r_1+\dots+r_j\in\Phi^+$.
(אפשר להניח כי $\xi\in\Phi^+\setminus\Pi$. נכתוב $\xi = \sum_{r\in\Pi} n_r\cdot r$ כאשר כל המקדמים ≥ 0. ע"י חישוב $\|\xi\|^2>0$, רואים שיש $r_1'\in\Pi$, כך ש- $n_{r_1}(r, r_1')>0$. הסק כי $r-r_1'\in\Phi^+$. חזור על התהליך לפי הצורך, עד שמוצאים $r_1',\dots,r_k'\in\Pi$, כך ש- $\xi-r_1'-\dots-r_{k-1}'=r_k'$ וגם לכל $i\le k$ $\xi-r_1'-\dots-r_i'\in\Phi^+$.)

8. נגדיר $sgn: W\longrightarrow\{\pm1\}$
ע"י $sgn(w) = (-1)^{\ell(w)}$
הוכח כי sgn הוא הומומורפיזם של חבורות.

9. תהי $\Phi\subset V$ מערכת שורשים, ו- $\Pi\subset\Phi$ מערכת יסודית. תהי $Aut(\Phi)$ חבורת האוטומורפיזמים של Φ (ראה דף 2). כזכור, $W\triangleleft Aut(\Phi)$. נגדיר

$$\Gamma = \{\tau\in Aut(\Phi) \mid \tau(\Pi)=\Pi\}$$

זאת תת חבורה של $Aut(\Phi)$. הוכח כי $Aut(\Phi) = W\rtimes\Gamma$.
חשב את Γ למערכות הבאות:

ל- A_ℓ: $\Gamma\cong\mathbb{Z}_2$,
ל- B_ℓ, C_ℓ: $\Gamma\cong 1$,
ל- D_4: $\Gamma\cong S_3$,
ל- D_ℓ, $\ell>4$: $\Gamma\cong\mathbb{Z}_2$,