תרגילים, דף 4

1. תהי Φ מערכת שורשים במרחב מכפלה פנימית V. תהי $\Phi^+\subset\Phi$ מערכת חיובית ותהי $\Pi\subset\Phi^+$ המערכת היסודית המוכלת ב-Φ^+. כזכור, Φ^+ מתקבל בצורה $\Phi^+=\Phi\cap V^+$ (בסימוני השיעור). ויהי $\geq$ הסדר הטוב על V המושרה ע"י V^+. נניח כי $u\in\overline{C_\Pi}$. הוכח כי לכל $w\in W=W(\Phi)$, $u\geq w(u)$. הוכח כי אם $u\in C_\Pi$, אז $w(u)=u$ אם ורק אם $w=1$. הוכח כי אם $u_1,u_2\in C_\Pi$, אז $w(u_1)=u_2$ אם ורק אם $w=1$ (ו-$u_1=u_2$!).

2. נתבונן במערכת G_2. תהי $\Pi=\{a=e_1-e_2,\ b=2e_2-e_1-e_3\}$, שהינה מערכת יסודית, כתוב את שש השורשים החיוביים של G_2 כצירופים ליניאריים של a,b.
צייר את השורשים של G_2 במישור, לפי המערכת הקרטזית הרגילה x,y, כאשר a מונח על ציר x, בקרן החיובית.
צייר את C_Π.
התבונן בחבורת Weyl אותה חישבנו בשיעור כ-$D_{12}\cong\mathbb{Z}_6\rtimes\mathbb{Z}_2$. ראינו כי $\mathbb{Z}_6$ נוצרת ע"י w_aw_b ו-$\mathbb{Z}_2$ ע"י w_a. צייר את התמונות של C_Π תחת כל החזקות של w_aw_b, וכן צייר את תמונת C_Π תחת w_a.

3. במערכת B_ℓ נתבונן ב-$\Pi=\{e_i-e_{i+1}\mid 1\leq i\leq \ell-1\}\cup\{e_\ell\}$ שהינה מערכת יסודית. נסמן $J=\{e_i-e_{i+1}\mid 1\leq i\leq \ell-1\}$. מצא את $[W:W_J]$.
כזכור, יצגנו את B_ℓ ב-$GL_\ell(\mathbb{Z})$. לפי ייצוג זה, נתבונן במחלקה $\begin{pmatrix}-I_3 & \\ & I_{\ell-3}\end{pmatrix}\cdot W_J$. כתוב את הנציג בעל אורך מינימלי מבין איברי המחלקה, ומצא את אורכו.

4. אלגברת לי נקראת פשוטה אם אין בה אידיאלים לא טריוויאליים. הוכח כי $\mathfrak{sl}_n(K)$ פשוטה, כאשר K מקרקטריסטיקה אפס (מצא גם לאיזו קרקטריסטיקה סופית, זה מספיק

להיות נכון ; למשל , צריך שהקרקטריסטיקה של A לא מחלקת את n.)