תרגילים - דף 6

1. תהי $\mathfrak{g}$ אלגברת לי פשוטה מעל $\mathbb{C}$. תהי $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ תת אלגברת Cartan ויהי $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus(\oplus_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{g}_\alpha)$ פירוק Cartan של $\mathfrak{g}$ ביחס ל-$\mathfrak{h}$. יהי $\alpha\in\Phi$. יהי $0\neq e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$. אנו יודעים שיש $e_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ כך ש-$[x_\alpha,y_\alpha]=h_\alpha$. נגדיר $S_\alpha=\mathrm{Span}\{e_\alpha,e_{-\alpha},h_\alpha\}$. הוכח כי $S_\alpha\subset\mathfrak{g}$ היא תת אלגברת לי, וכי ההעתקה הלינארית $i_\alpha:S_\alpha\to\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, כך ש-

$$i_\alpha(e_\alpha)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad i_\alpha(e_{-\alpha})=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad i_\alpha(h_\alpha)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

מגדירה איזומורפיזם של אלגבראות לי (ובפרט S_α פשוטה).

2. תהי $\mathfrak{g}$ אלגברת לי פשוטה מעל $\mathbb{C}$ ויהי $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus(\oplus_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{g}_\alpha)$ פירוק Cartan, כמו קודם. ראינו כי למערכת יסודית $\Pi=\{p_1,\dots,p_\ell\}\subset\Phi$ יש אוטומורפיזם יחיד $\theta:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ כך ש

$$\theta(e_{p_i})=-e_{-p_i}$$
$$\theta(e_{-p_i})=-e_{p_i}\qquad \text{לכל } 1\le i\le \ell$$
$$\theta(h_{p_i})=-h_{p_i}$$

כאשר $e_{-p_i}\in\mathfrak{g}_{-p_i}$ נבחר לפי הדרישה $[e_{p_i},e_{-p_i}]=h_{p_i}$ לכל i. נתבונן בדוגמא $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, ובתת אלגברת Cartan $\mathfrak{h}$ של המטריצות האלכסוניות ב-$\mathfrak{g}$. ראינו כי

$\Pi=\{\frac{1}{2n}(e_{ii}-e_{i+1,i+1})\mid 1\le i\le n-1\}$ היא מערכת יסודית למערכת Φ המתאימה לפירוק Cartan של $\mathfrak{g}$ ביחס ל-$\mathfrak{h}$. מצא במפורש את האוטומורפיזם θ.

(תשובה: $\theta(X)=-{}^tX$)

3. בדוק כי מערכת השורשים באלגבראות לי הקלאסיות מעל $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}=A_\ell,B_\ell,C_\ell,D_\ell$, ביחס לתת אלגברת Cartan של המטריצות האלכסוניות ב-$\mathfrak{g}$, איזומורפית למערכת השורשים שסומנו $A_\ell,B_\ell,C_\ell,D_\ell$ בהתאמה. מצא בסיס Chevalley ל-A_ℓ ול-C_ℓ.

4. תהי $\mathfrak{g}_2$ אלגברת לי הפשוטה מעל $\mathbb{C}$ המתאימה למערכת השורשים G_2. מהו $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}_2$? מהו המימד של תת אלגברת Cartan?

5. הגדרנו בשעור $y_r(t)=\exp(te_r)$ באלגברת לי
קלאסית $\mathfrak{g}$. ראינו בדוגמא $\mathfrak{g}=D_n=\mathfrak{o}_{2n}(K)$, כי $e_r^2=0$
לכל $r\in\Phi$, כאשר מדובר בפירוק Cartan לפי תת-אלגברת
לי של המטריצות האלכסוניות ב-$\mathfrak{g}$. בדוק כי $e_r^2=0$
לכל $r\in\Phi$ גם ל-$\mathfrak{g}=A_n, C_n$.
ול-$\mathfrak{g}=B_n=\mathfrak{o}_{2n+1}(K)$, $e_r^2\neq 0$ אך $e_r^3=0$; כתוב
במקרה זה את e_r (מטריצה ב-$M_{2n+1}(K)$) באופן מפורש
ומצא את אלה שהם מטריצות נילפוטנטיות מסדר 3.
השלם את ההוכחה ש $G_K/Z(G_K)\cong\mathfrak{g}(K)$
ל A_n, B_n, C_n.

6. הוכח כי ל-$\mathfrak{g}=A_n$, $G_K\cong SL_{n+1}(K)$
ולכן $A_n(K)\cong PSL_{n+1}(K)$.
(כזכור G_K היא תת החבורה של $GL_{n+1}(K)$ הנוצרת
ע"י המטריצות $y_{ij}(t)=I_{n+1}+te_{ij}$, כאשר $1\le i\neq j\le n+1$
ו-e_{ij} היא המטריצה ב-$M_{n+1}(K)$ שיש לה 1
בקואורדינטה (i,j) ואפס בכל קואורדינטה אחרת. לכן
מה שצריך להוכיח הוא ש-$SL_{n+1}(K)$ נוצרת ע"י
המטריצות $y_{ij}(t)$. אפשר למצוא הוכחות ברשת.)