חבורות Chevalley
סיכום הרצאה 1#

דוד סודרי
אוהד ליבנה בר־און

14 במרץ 2017

- ספרות: R. Carter — Simple Groups of Lie Type
- יהיו שיעורי בית לצורך תרגול, ללא חובת הגשה.
- הציון בקורס מבוסס על עבודה, שתורכב משאלות שיופיעו בשיעורי הבית ובמהלך הקורס.

1 פרק א': החבורות הקלאסיות

1.1 א'1: החבורות הלינאריות

הגדרה. יהי K שדה. נגדיר את החבורות הבאות:

1. נסמן ב־$\mathrm{GL}_n(K)$ את חבורת המטריצות ההפיכות מסדר $n \times n$ מעל K.
2. יהי Z המרכז של $\mathrm{GL}_n(K)$, המורכב בדיוק מקבוצת המטריצות הסקלריות שאינן 0.
3. $\mathrm{PGL}_n(K) = \mathrm{GL}_n(K)/Z$ (P עבור Projective).

הדטרמיננטה $\det : \mathrm{GL}_n(K) \to K^*$ היא הומומורפיזם של חבורות. מכאן נוכל לקבל את החבורות

4. $\mathrm{SL}_n(K) = \ker(\det) \triangleleft \mathrm{GL}_n(K)$ (S עבור Special). מתקיים
$$\mathrm{GL}_n(K)/\,\mathrm{SL}_n(K) \cong K^*$$
5. $Z(\mathrm{SL}_n(K)) = \{\lambda I_n \mid \lambda^n = 1\} = Z \cap \mathrm{SL}_n(K)$.
6. $\mathrm{PSL}_n(K) = \mathrm{SL}_n(K)/Z \cap \mathrm{SL}_n(K)$.

נניח כי $K=\mathbb{F}_q$ הוא שדה סופי בעל q איברים, אז

$$|\operatorname{GL}_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n-q^i) = q^{\binom{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}(q^i-1)$$
$$|\operatorname{PGL}_n(\mathbb{F}_q)| = |\operatorname{SL}_n(\mathbb{F}_q)| = q^{\binom{n}{2}}\prod_{i=2}^{n}(q^i-1)$$
$$|\operatorname{PSL}_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{q^{\binom{n}{2}}\prod_{i=2}^{n}(q^i-1)}{(n,q-1)}$$

משפט. 1. אם K שדה אינסופי אז $\operatorname{PSL}_n(K)$ היא חבורה פשוטה לכל $n\geq 2$.

2. גם לשדות סופיים $\operatorname{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$ פשוטה, פרט למקרים $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{F}_2), \operatorname{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$.

1.2 א'2: החבורות הסימפלקטיות

תהי $S\in M_n(K)$ מטריצה הפיכה ואנטיסימטרית ($S^t=-S$), ונניח כי $\operatorname{chr} K\neq 2$ וכי $m=2n$. נסמן את המטריצה

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

אז S דומה ל־J_{2n}: קיימת מטריצה (הפיכה) g שעבורה $g^tSg=J_{2n}$.

הגדרה. נסמן את החבורה הסימפלקטית

$$\operatorname{Sp}_{2n}(K) = \{g\in\operatorname{GL}_{2n}(K) \mid g^tJ_{2n}g = J_{2n}\}$$

מתקיימות הזהויות

$$Z(\operatorname{Sp}_{2n}(K)) = \{\pm I_{2n}\}$$
$$\operatorname{Sp}_2(K) = \operatorname{SL}_2(K)$$

הגדרה.

$$\operatorname{PSp}_{2n}(K) = \operatorname{Sp}_{2n}(K)/Z(\operatorname{Sp}_{2n}(K))$$

מתקיים

$$\operatorname{Sp}_{2n}(K) \supset \left\{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & -g^{t-1}\end{pmatrix}\middle| g\in\operatorname{GL}_n(K)\right\}$$
$$\operatorname{Sp}_{2n}(K) \supset \left\{\begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & I_n\end{pmatrix}\middle| X^t = X\right\}$$

וכן $g\in\operatorname{Sp}_{2n}(k) \iff g^t\in\operatorname{Sp}_{2n}(K)$.

בלשון מרחבים וקטוריים, יהי V מ"ו מעל K, ותהי $b: V\times V\to K$ תבנית בילינארית אנטיסימטרית ולא־מנוונת, כלומר אם $b(v_0,V)=0$ אז $v_0=0$. מכאן נובע כי $\dim V=2n$. כמו כן קיים ל־V בסיס $B=\{v_1,\dots,v_n,v_{-1},\dots,v_{-n}\}$ המקיים

$$\begin{cases} b(v_i,v_j)=0 \\ b(v_{-i},v_{-j})=0 \\ b(v_i,v_{-j})=\delta_{ij} \end{cases}$$

כלומר

$$\left(\begin{array}{c|c} b(v_i,v_j) & b(v_i,v_{-j}) \\ \hline b(v_{-i},v_j) & b(v_{-i},v_{-j}) \end{array}\right)=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

אז החבורה הסימפלקטית היא חבורת ההעתקות המשמרות את התבנית:

$$\mathrm{Sp}(V,b)=\{T\in\mathrm{Aut}_K(V)\mid \forall u,v\in V: b(T(u),T(v))=b(u,v)\}$$

כאשר $b(u,v)=[u]_B^t(b(u_i,v_j))[u]_B$.

משפט. 1. החבורה $\mathrm{PSp}_{2n}(K)$ פשוטה לכל K ולכל n, פרט למקרה $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_2)$.

2. $\mathrm{Sp}_{2n}(K)\subset\mathrm{SL}_{2n}(K)$.

הערה: גם כאשר $\mathrm{chr}\,K=2$ ניתן להגדיר את $\mathrm{Sp}_{2n}(K)$ ביחס ל־J_{2n}.

1.3 א'3: החבורות האורתוגונליות

תהי $S\in M_n(K)$ מטריצה הפיכה וסימטרית, ונניח כי $\mathrm{chr}\,K\neq 2$. מחלקת החפיפה של S היא $\{g^tSg\mid g\in\mathrm{GL}_n(K)\}$. מיון מחלקות החפיפה תלוי בשדה, אבל בהנחה $\mathrm{chr}\,K\neq 2$, S חופפת למטריצה אלכסונית. אם K סגור אלגברית אז S חופפת ל־I_n.

במקרה $K=\mathbb{R}$, S חופפת למטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} I_r & \\ & -I_s \end{pmatrix}$.

הגדרה. נגדיר את החבורות

$$O_n(K,S)=\{g\in\mathrm{GL}_n(K)\mid g^tSg=S\}$$
$$SO_n(K,S)=O_n(K,S)\cap\mathrm{SL}_n(K)$$

נבחין כי $Z(O_n)=\{\pm I_n\}$.

נבחר את המטריצות

$$S=\begin{cases} \begin{pmatrix} & I_\ell \\ I_\ell & \end{pmatrix} & n=2\ell \\ \begin{pmatrix} & & I_\ell \\ & 1 & \\ I_\ell & & \end{pmatrix} & n=2\ell+1 \end{cases}$$

בנוסף נגדיר את החבורה

$$\Omega_n(K)=[O_n(K),O_n(K)]\subset\mathrm{SO}_n(K)$$

נבחין כי $Z(\Omega_n(K))=\Omega_n(K)\cap\{\pm I_n\}$.

משפט. לכל $n\geq 5$, החבורה $\Omega_n(K)/Z(\Omega_n(K))$ פשוטה.

2 פרק ב': חבורות Weyl

2.1 ב'1: מערכות שורשים (root systems)

יהי $(V,(,))$ מרחב מכפלה פנימית ממימד ℓ מעל $\mathbb{R}$.

הגדרה. העתקת השיקוף (reflection) על V המתאימה לוקטור $0 \neq v \in V$, שתסומן w_u, היא ההעתקה היחידה המקיימת את שתי התכונות

$$\forall v \perp u : w_u(v) = v$$
$$w_u(u) = -u$$

ההעתקה נתונה על־ידי הנוסחה

$$w_u(v) = v - \frac{2(u,v)}{(u,u)}u$$

נבחין כי העתקות שיקוף הן איזומטריות.

הגדרה. תהי $\Phi \subset V$ תת־קבוצה סופית של וקטורים שונים מ־0. נאמר כי Φ היא מערכת שורשים ב־V אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. Φ פורשת את V.
2. $\forall u \in \Phi : w_u(\Phi) \subset \Phi$ (ומסופיות Φ נובע כי $w_u(\Phi) = \Phi$).
3. כל המקדמים $\forall u, v \in \Phi : \frac{2(u,v)}{(u,u)} \in \mathbb{Z}$.
4. אם $u, \lambda u \in \Phi$ אז $\lambda = \pm 1$.

דוגמאות. 1. נתבונן ב־$\mathbb{R}^{\ell+1}$ ונסמן את הבסיס הסטנדרטי $\{e_1, \ldots, e_{\ell+1}\} \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$. נבחר את התת־מרחב

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell+1} x_i e_i \middle| \sum_{i=1}^{\ell+1} x_i = 0 \right\}$$

עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. נקח $\Phi = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq \ell+1\}$. זו מערכת שורשים, שנסמן A_ℓ. $|A_\ell| = \ell(\ell+1)$, ובהמשך נראה שהיא מתאימה לחבורה $\mathrm{SL}_{\ell+1}(F)$. נראה שזו מערכת שורשים:

(א) ברור כי Φ פורשת את V.

(ג) עבור $i \neq j$ ו־$r \neq s$ מתקיים

$$\frac{2(e_i - e_j, e_r - e_s)}{\|e_i - e_j\|^2} \overset{\|e_i - e_j\|^2 = 2}{=} (e_i - e_j, e_r - e_s) = \delta_{ir} - \delta_{is} - \delta_{jr} + \delta_{js} \in \mathbb{Z}$$

(ב) נשתמש בתוצאה שקיבלנו ונחשב ישירות:

$$\begin{aligned} w_{e_i-e_j}(e_r-e_s) &= e_r-e_s-(\delta_{ir}-\delta_{is}-\delta_{jr}+\delta_{js})(e_i-e_j)= \\ &= \begin{cases} e_r-e_s & \{i,j\}\cap\{r,s\}=\emptyset \\ e_r-e_s-2(e_r-e_s)=e_s-e_r & i=r, j\neq s, (i\neq s, j\neq r) \\ e_r-e_s-(e_r-e_j)=e_j-e_s & i=r, j=s \\ \vdots & \vdots \end{cases} \\ &\in\Phi \end{aligned}$$

ואפשר להמשיך לבדוק גם את כל שאר המקרים.

(ד) ברור.

2. נקח $V=\mathbb{R}^\ell$ עם המכפלה הסטנדרטית. נגדיר

$$\Phi=\{\pm e_i\pm e_j \mid 1\le i<j\le\ell\}\cup\{\pm e_i \mid 1\le i\le\ell\}$$

(כלומר כמו A_ℓ אבל גם עם הסכומים e_i+e_j). נסמן את המערכת ב־B_ℓ, אז $|B_\ell|=2\ell^2$ והמערכת מתאימה לחבורות אורתוגונליות בנות $2\ell+1$ איברים.

(א) שוב ברור ש־Φ פורשת.

(ג) גם ברור, כי $\frac{2(u,v)}{(u,u)}=(u,v), 2(u,v)\in\mathbb{Z}$.

(ב)

$$w_u(v)=v-\underbrace{\frac{2(u,v)}{(u,u)}}_{\in\mathbb{Z}}u\in\sum_{i=1}^{\ell}\mathbb{Z}e_i$$

ובנוסף w_u איזומטריה, כלומר $\|w_u(v)\|^2=\|v\|^2=1,2$, ולכן $w_u(v)\in\Phi$.

(ד) קל לבדוק

3. $V=\mathbb{R}^\ell$,

$$\Phi=\{\pm e_i\pm e_j \mid 1\le i<j\le\ell\}\cup\{\pm 2e_i \mid 1\le i\le\ell\}$$

זו מערכת המסומנת C_ℓ. ההוכחה בתרגיל. המערכת מתאימה לחבורות סימפלקטיות.

4. $V=\mathbb{R}^\ell$,

$$\Phi=\{\pm e_i\pm e_j \mid 1\le i<j\le\ell\}$$

זו מערכת המסומנת D_ℓ. ההוכחה בתרגיל. המערכת מתאימה לחבורות אורתוגונליות זוגיות.

5. $V=\{\sum_{i=1}^3 x_ie_i\in\mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 x_i=0\}$ עם המכפלה הסטנדרטית,

$$\Phi=\{e_i-e_j \mid 1\le i\neq j\le 3\}\cup\{\pm(2e_{i_1}-e_{i_2}-e_{i_3}) \mid i_1\neq i_2\neq i_3\neq i_1\}$$

זו מערכת המסומנת ב־G_2, ומכילה 12 שורשים. נראה כי

$$\Phi = \left\{ v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \middle| \begin{aligned} x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \|v\|^2 = 2, 6 \end{aligned} \right\}$$

ברור כי Φ מוכלת באגף ימין. מאידך, עד כדי סדר, הפתרונות היחידים בשלמים אי־שליליים לדרישה $\|v\|^2 = 2, 6$ הם $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$, $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2$. יחד עם הדרישה לסכום 0 נקבל שבפתרונות היחידים עד כדי סדר הם $(+2, -1, -1), (+1, -1, 0)$.

(א) קל לראות כי Φ פורשת.

(ג) אם $u = e_i - e_j$ אז $\frac{2(u,v)}{(u,u)} = (u, v) \in \mathbb{Z}$ ואם $u = 2e_{i_1} - e_{i_2} - e_{i_3}$ אז $\frac{2(u,v)}{(u,u)} = \frac{1}{3}(2e_{i_1} - e_{i_2} - e_{i_3}, v)$ וניתן לבדוק את כל האפשרויות.

(ב)

$$w_u(v) = v - \frac{2(u, v)}{(u, u)}u \in \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \mathbb{Z}e_3$$

ומכיוון ש־w_u איזומטריה, $\|w_u(v)\|^2 = \|v\|^2 = 2, 6$, ולכן $w_u(v) \in \Phi$ (לפי האפיון השני שנתנו ל־Φ.)

(ד) קל לראות.